Pirmin Stekeler-Weithofer
FORMEN DER ANSCHAUUNG
Eine Philosophie der Mathematik

Berlin – New York (Walter de Gruyter) 2008, 400 str.

K filosofii matematiky – podobně jako jakékoli jiné vědy – existují dva základní přístupy. V tom prvním chápe filosofie matematiku jako speciální vědeckou disciplínu, studuje její dějiny, východiska a současné perspektivy a skrze jejich reflexi jí pak pomáhá k dalšímu, úspěšnějšímu a plodnějšímu rozvoji. V tomto pomocném pojetí filosofie obvykle pozvolna přejímá vědecké standardy, zvláště pak ideu pokroku a praxi jednoduchého „Weitermachen“. To se stalo údělem takzvaného „zkoumání základů“ (*Grundlagenforschung*), reprezentovaného dnes zvláště tzv. neologicistickým a strukturalistickým hnutím:[1] ponecháme-li stranou historické reminiscence a příležitostné filosofické poznámky, víceméně je nelze odlišit od výzkumů v oblasti teorie množin či modelů.

V recenzované knize zaujal Stekeler-Weithofer explicitně druhý možný postoj, jejž lze charakterizovat jako obecně wittgensteinovský či „terapeutický“ a v němž si filosofie a matematika vyměňují role.[2] Matematické systémy a praxe nejsou tentokrát studovány pro ně samy nebo, jak říká Platón v *Ústavě,* jako „absolutní počátky“, nýbrž jako „výstupky a východiště“ (*Resp.* 511b), které nás mají dostat do stavu, v němž je již nepotřebujeme, a můžeme je tedy odkopnout jako Wittgensteinův pověstný žebřík ze závěru *Tractatu*. Nejde nám totiž o ně, ale o řešení obecných problémů lidského poznání, zvláště ve vztahu k jeho objektivitě, podmínkám a mezím. Nevadí přitom, když je příslušná vědecká teorie, matematická soustava či zkoumaná jazyková praxe stará či dokonce „překonaná“, právě naopak: čím starší, tím lepší, jak je to vyjádřeno ve Wittgensteinově poznámce, že pozdravem filosofů by mělo být „dej si na čas“.[3]

Stekeler-Weithofer své cíle vřadil do dlouhé a úctyhodné tradice, jejíž hlavní mezníky představuje Platón, Kant, Frege, Wittgenstein a samozřejmě také Hegel, na nějž je autor uznávaným specialistou.[4] Zhruba řečeno tedy sleduje kantovskou linii výkladu a vysvětluje matematiku

---

1 Viz např. S. Shapiro, *Philosophy of Mathematic, Structure and Ontology*, Oxford 1997; nebo G. Hellman, *Mathematics without Numbers*, Oxford 1989.

2 Pro jiný, nedávný příklad tohoto přístupu srv. L. Kvasz, *Patterns of Change, Linguistic Innovations in the Development of Classical Mathematics*, Basel 2008.

3 L. Wittgenstein, *Rozličné poznámky*, Praha 1993, str. 121.

4 Zvláště skrze knihy P. Stekeler-Weithofer, *Hegels analytische Philosophie. Die Wissenschaft der Logik als kritische Theorie der Bedeutung*, Padeborn 1992; týž, *Philosophie des Selbstbewußseins*. *Hegels System als Formanalyse von Wissen und Autonomie*, Frankfurt a. M. 2005.

jako vědu o *čistých formách názoru*. Odkazem k názoru je tak matematika od počátku vztažena ke světu našich smyslů, i když pouze nepřímo, skrze jejich formu. Ve své snaze explikovat tento vztah a vyrovnat se s pokantovským vývojem vědy a filosofie autor navrhuje rozlišit u názoru trojčlennou strukturu, kam patří (1) praktická zkušenost či *know-how*, (2) lokální empirické pozorování a (3) technicky a teoreticky zprostředkované měření. Na pozadí těchto výsostných forem (*Hochformen*) názoru mají být diskutovány otázky položené či inspirované Kantem včetně následujících:

(1) Co znamená, že se dvě rovnoběžky neprotínají (s tím možným důsledkem, že existuje jen jediná pravá – např. euklidovská – geometrie)?

(2) Co znamená, že spojitá funkce nabývající na nějakém intervalu hodnot opačného znaménka protíná osu *x* (takže kontinuum má jen jeden specifický tvar)?

(3) Co znamená, že v kontinuu existuje více bodů, než je přirozených čísel (takže je nemůžeme pojmenovat ani poznat v jejich úplnosti)?

(4) Co znamená, že existují pravdy aritmetiky, které nemohou být dokázány v žádném axiomatickém systému (a nelze tedy dokázat všechno, co je pravdivé, lidskými prostředky)?

Filosoficky založenému čtenáři bude nejspíš obratem jasné, že to, co je zde primárně kontroverzní, nejsou příslušná matematická tvrzení, ale jejich uzávorkované „důsledky“, mnohdy vyvozované oním ležérním stylem, jenž je typický pro první z obou zmíněných způsobů filosofického zacházení s matematikou: pro právě ten způsob usuzování, u něhož Kant v *Kritice čistého rozumu* dospěl k verdiktu, že překračuje hranice, které rozum dává sám sobě. Demarkace území, v němž matematika a (formální) logika přestávají být kompetentními, byl již cílem Stekeler-Weithoferovy první knihy *Grundprobleme der Logik* (Berlin – New York 1986), jak ostatně naznačuje již její podtitul *Elemente einer Kritik der formalen Vernunft*. Avšak *Grundprobleme* zůstaly omezeny na problémy tradiční a moderní logiky, aritmetiky a analýzy, v důsledku čehož nechaly problémy geometrie a kinematiky stranou. Nová kniha takto doplňuje Stekelerovy dřívější počiny do kompletní filosofie matematiky kantovského střihu.

V tento okamžik může vyvstat otázka, proč by měla být Kantovi v této oblasti vůbec připisována nějaká důležitost. Odpověď je nasnadě: Jakkoli jsou jeho názory kontroverzní, bezpochyby ovlivnily celý další vývoj oboru, a učinily tak Kanta nejvlivnější postavou filosofie matematiky až po dnešní dobu, jak ukazují nejen vlivná filosofická hnutí, která ho následují, ale především ty proudy (například logicismus), které mu oponují, když místo názoru kladou při zakládání matematického poznání důraz na pojem. V kontrastu k nim totiž vznikají další myšlenkové proudy (jmenujme intuicionismus či konstruktivismus), které se ke Kantovi v mnoha ohledech stále hlásí, neboť matematiku odvozují od konstrukcí v názoru, intuici.

Kantův nezpochybnitelný vliv na problematiku základů je přitom již tradičně záhadou a dráždidlem pro mnoho matematiků koketujících s filosofií (jako byl třeba Cantor) a filosofů koketujících s vědou (jako byl třeba Russell), neboť co se týče reálných matematických výsledků, nedozvíme se od Kanta nic více, než že 7 + 5 = 12 či součet úhlů v trojúhelníku je roven 180°.

Rozvedení Kanta v recenzovaném svazku možná lépe uspokojí i tento druh čtenářů, neboť kniha se dosti podrobně zabývá základy syntetické, analytické, algebraické i axiomatické geometrie, kinematiky a teorie relativity. Může tedy podrobně rozebrat například následující filosofické problémy: (5) Co znamená, že je rychlost světa ve vesmíru konstantní? (6) Co znamená, že existuje lineární chronologické uspořádání všech událostí? Anebo (7) Co nám Zénónovy (či analogické) paradoxy anebo paradox dvojčat a jejich obvyklá řešení říkají o struktuře času a prostoru? Avšak zmíněné počáteční uspokojení se dost možná ukáže jako prchavé, neboť kniha se zcela úmyslně zabývá pouze konceptuální bází a vyhýbá se diskusím o nejnovějších trendech a atraktivních tématech – ne snad, že by pro ně nebylo místo, ale protože by zatemnily její hlavní pointu, jíž je systematická reflexe forem našeho jazyka a skrze ně pak lidského poznání. S ohledem na tento cíl je naopak mimořádně důležité znát současný filosofický vývoj, z něhož autor využívá především vlivů Lorenzenových, Sellarsových a Brandomových, neboť kombinují v základu kantovský, transcendentalistický přístup s tím nejlepším z německého a angloamerického pragmatismu.

Přejděme nyní k vlastnímu textu.

1) Úskalí hledání základů

Rozsáhlý úvod umisťuje obsah knihy do širších souvislostí rozlišných zakládajících hnutí. Ústředním problémem je očividně rozhodnutí, co činí matematické a speciálně geometrické věty pravdivými a čím lze jejich pravdivost legitimizovat. Odpovědi obvykle podávané v rámci převládajících trendů, jako jsou axiomatismus, konvencionalismus, pragmatismus či intuicionismus, autor sice shledává nedostatečnými, ale neodmítá je jako celek. Uznává roli názoru (intuice) a praxe (kreslení diagramů v případě geometrie, operování s artefakty v případě aritmetiky), aniž by přitom nepřiměřeně snižoval hodnotu teorií (axiomatických systémů) a teoretických modelů. V tomto smyslu nechce tradiční zakládající hnutí vyvrátit ani nahradit jiným schématem. Chce jich využít – v návaznosti na Wittgensteina – jako pomůcky k lepšímu porozumění matematice tím, že se poučí z jejich chyb a úspěchů.

Ze všech zakládajících pokusů je autorovi nejbližší konstruktivistická tradice Lorenzenova, která tvoří i východisko mnoha jeho pozdějších úvah. Lorenzen spolu s „erlangenskou školou" narýsoval originální projekt operativní matematiky a logiky a postupně jej rozvinul v komplexní program „konstruktivní filosofie", jehož cílem byla rekonstrukce všech oblastí lidského poznání konstruktivními prostředky. S Lorenzenovým pragmatickým přístupem, jenž se točí kolem teze, že bychom neměli pěstovat vědu pro ni samu, ale spíše najít její „Sitz im Leben", sice autor rámcově souhlasí, ale považuje za matoucí a mylné, když je tento filosofický postoj transformován ve vědecký program, jenž se – jako všechno, co se podřadí pod tento titul – stane příliš úzkým a náchylným k snadným a schematickým řešením.

Odstup, který se systematicky vyhýbá podepsat pod jakoukoli definitivní či vševysvětlující teorii, Stekeler-Weithofer sdílí s filosofií Wittgensteinovou včetně její hlavní vady, totiž tendenci ke zkratkovitým formulacím. Tato tendence se zvláště markantně projevuje v úvodu knihy. Převážná část textu jí ale naštěstí zůstává netknuta, pravděpodobně proto, že oproti úvodu vznikla podstatně dříve. Čtenářům může napomoci, když začnou první kapitolou a k úvodu se vrátí až později.

2) Co je standardní model geometrie?

Vlastní výklad začíná rozborem základů syntetické geometrie. Základním problémem tu je epistemický status geometrie, zvláště s ohledem na Kantovo tvrzení, že se jedná o apriorní syntetickou disciplínu. V tomto kontextu vyvstává zvláště aktuálně nutnost neopomenout následující vývoj a revize Kantova paradigmatu, například argumenty snesené pro názor, že matematika je čistě analytické povahy (tj. jde v ní výlučně o dedukci z jazykových konvencí), anebo Quinovu kritiku „dvou dogmat empirismu“, v níž je rozlišení mezi syntetickým a analytickým odmítnuto jako vágní a nesmyslné.

Autor zde navazuje na Lorenzenovo[5] a Sellarsovo[6] rozlišení mezi formálně a materiálně správnými větami a úsudky a na axiom, že existuje zásadní (byť jen relativní) rozdíl mezi (1) výroky zachycujícími pozorování nebo induktivně zdůvodněná tvrzení, (2) konstitutivními presupozicemi těchto pozorování a materiálními normami, které činí tato pozorování možnými, a (3) formálními tvrzeními, která vyjadřují obecné podmínky formulace vědeckých teorií. Věty typu (1) i (2) se vztahují k názoru, a jsou jím tedy i kontrolovány, avšak věty typu (2) mohou být revidovány a uznány jako pravdivé pouze jako celek, neboť teprve díky nim jsou vůbec možná individuální pozorování i celý koncept světa. Jelikož geometrické a kinematické výroky jsou primárně chápány jako tvrzení o struktuře či konstitutivních podmínkách našeho jednání v prostoru a čase, náleží k typu (2), a nelze je proto pravdivostně vyhodnotit bez odkazu k názoru, tj. nevystačíme si například jen s axiomatickými dedukcemi. Argumenty snesené na podporu tohoto stanoviska se vcelku shodují s argumenty, které zformuloval Frege vůči Hilbertovi: za prvé, legitimizovat je nutno i axiomy, a za druhé, dedukce z axiomů nejsou korektní samy o sobě, ale jen skrze danou sémantiku (pojem pravdy) či třídu přípustných modelů. Povaha těchto modelů, zvláště takzvaného standardního modelu, si vyžadují další vysvětlení.

V této souvislosti je didakticky významný případ aritmetiky, jak byl probrán v autorových *Grundprobleme der Logik* a znovu, ač podstatně stručněji, v oddílu 4.2 recenzované knihy.

---

5 Viz P. Lorenzen, *Normative Logic and Ethics*, Mannheim 1969.

6 W. Sellars, *Empiricism and the Philosophy of Mind*, in: H. Feigl – M. Scriven (vyd.), *Minnesota Studies in the Philosophy of Science*, I: *The Foundations of Science and the Concepts of Psychology and Psychoanalysis*, Minneapolis 1956, str. 253–329.

Umožní nám totiž vysvětlit myšlenku, co znamená, že jsou nějaké věty pravdivé, a především co znamená, že jsou pravdivé nezávisle na jakémkoli axiomatickém systému. V případě elementární aritmetiky vypadá vysvětlení následovně: (1) Nejprve musíme vědět, „o čem“ příslušné věty jsou či, přesněji, přes co kvantifikují. V tradici Kantova koperníkovského obratu a Fregova obratu k jazyku se tato otázka rovná popisu třídy substituovatelných termů (reprezentací), v tomto případě numerálů 1, 2, 3… a jejich rekurzivně definovaných složení M+N a M×N. (2) Další krok spočívá v popisu elementárních vět, v aritmetickém případě M<N and M=N pro libovolné substituovatelné termy M, N. Komplexní věty se tu definují obvyklým rekurzivním způsobem jako ¬A, A→B a (∀x)A(x) pro dané věty A, B a matrici A(x) vytvořenou z A nahrazením některých výskytů termu N proměnnou x. (3) Jelikož prostředkem, díky němuž je libovolné jméno jménem něčeho, tj. díky němuž se realizuje fenomén reference, jsou (jak zdůrazňoval Frege) kritéria identity, postačuje nám k popisu, o čem je aritmetika (v moderní terminologii tedy k popisu jejího standardního modelu), když dané věty ohodnotíme jednoznačně jako pravdivé či nepravdivé, a současně zajistíme, aby splňovaly tzv. Leibnizův princip. Celé toto ohodnocení je proto netriviální, holistická záležitost. (4) U elementárních vět je pravdivostní ohodnocení zajištěno výhradně na základě kalkulování s numerály, jak bylo dosti podrobně popsáno v Lorenzenově operativním projektu.[7] V zásadě zde ale stačí odkaz k elementárním výpočetním procedurám, jak se jim učíme na základní škole. Tarského definice pak obstará ohodnocení komplexních vět, speciálně proto, že: buď pro každý term N z 1, 2, 3, . . . platí, že je věta A(N) pravdivá, a tudíž je pravdivá věta (∀x)A(x), nebo existuje N z 1, 2, 3, . . . takový, že je A(N) nepravdivá, a tudíž je (∀x)A(x) nepravdivá, *tertium non datur*.

Nyní se na Tarského definici můžeme dívat jako na něco, co podstatně využívá pravidel s nekonečně mnoha premisami:

A(1), (A(2), … / (∀x)A(x),

což není dovoleno v obvyklých, úžeji pojatých důkazových systémech. Lorenzen v návaznosti na Schütteho hovoří v prvním případě o polo-formálních důkazových systémech či, lépe řečeno, systémech sémantických norem, které konstituují relevantní materiální pojem pravdy či standardní model. Tyto systémy jsou materiální, protože obsahují odkaz k něčemu mimojazykovému, ne čistě formálnímu. S ohledem na Gödelovy a Tarského výsledky je třeba tyto evaluační normy odlišit od jejich užších variant, v Lorenzenově a Schütteho terminologii nazývaných „plně formální systémy“, jejichž příkladem je třeba Peanova aritmetika. Jedná se vlastně o pouhé konvenční generátory figur, které mohou být pravdivé nebo nepravdivé až v závislosti na sémantice definované dříve. Takto je jednak úplně vysvětlen a demystifikován

[7] Detaily viz P. Lorenzen, *Einführung in die operative Logik und Mathematik*, Berlin 1955.

rozdíl mezi matematickou pravdivostí a matematickým důkazem, jednak nám to dovoluje číst Gödelovy věty ne jako kritiku čistého rozumu, ale jako doplňkovou informaci o Peanově formalismu.

V případě geometrie je definice sémantické báze ještě komplikovanější, i když nadále zůstává holistickou záležitostí. V návaznosti na Lorenzena[8] začíná Stekeler-Weithofer u postulátů, podle nichž má být posuzována kvalita pravoúhlých těles (či kvádrů) a klínů. Jsou to materiální normy, v nichž se dané pojmy definují odkazem na předem danou praxi vyrábění kopií. Na této praxi je založen pojem kongruence. Autor dále stipuluje, že kvádr je těleso splňující následující sadu postulátů: (1) má 6 stěn, 12 hran a 8 vrcholů, (2) stěna kvádru pasuje na stěnu jeho kopie a na stěnu protilehlou, v důsledku čehož může vzniknout kvádr větších rozměrů, (3) kvádr lze skrze libovolný vnitřní bod stěny jednoznačně rozdělit na čtyři kvádry menší velikosti, (4) u dvou libovolných, ne nutně kongruentních kvádrů lze dosáhnout plného či částečného překrytí ve dvou libovolných bodech jejich stěn, (5) dva kvádry ležící na stěně třetího se překrývají již v případě, když se dotýkají jejich protilehlé hrany, (6) napříč ležícími hranami daného kvádru lze vést pouze jeden diagonální řez, jenž kvádr rozdělí na dva pravoúhlé klíny, které jsou vzájemnými kopiemi, (7) odejmutím nebo přidáním kongruentních těles ke kongruentnímu tělesu na tomtéž místě vznikají opět kongruentní tělesa, (8) pro každé dvě hrany a každé dva kvádry existuje přirozené číslo *n* takové, že hrana jednoho kvádru po *n* opakovaných přiloženích přesáhne hranu druhého.

Tyto postuláty očividně neodpovídají ani tradičnímu pojetí axiomů jakožto sebeevidentních vět, ani Hilbertovu modernímu pojetí axiomů jakožto implicitních definic. Jsou vnořeny v praxi formování těles a posuzování kvality (stability) jejich formy, a to do té míry, že pouze možnost této praxe garantuje jejich vzájemnou závislost či nezávislost a konzistenci. Úplností postulátů autor míní to, že postačují k založení euklidovské geometrie inferenčně-holistickým způsobem, neboť nepřímo zachycují to, co se nazývá standardním modelem. Podle autora totéž neplatí o podobných pokusech Lorenzenových, jenž geometrické pojmy typu roviny, přímky či kolmosti definuje na základě praxe překlápění, v důsledku čehož nelze rozhodnout o existenci pravoúhelníků. Ve Stekeler-Weithoferově systému jsou dané definice jednoduchými (materiálními) důsledky postulátů: rovinná je plocha, která pasuje na stěnu kvádru, přímá je čára, která pasuje na hranu kvádru, a dvě čáry svírají pravý úhel, jestliže pasují na dvě hrany procházející jedním vrcholem kvádru.

Takzvaný postulát o rovnoběžkách, jenž je, jak známo, neodvoditelný (v plně formálním smyslu) z ostatních Eukleidových či Hilbertových axiomů, je navíc materiálním důsledkem postulátů (6) a (8). Tvrdíme-li tedy, že se rovnoběžky nemohou protínat při žádném možném prodloužení,

[8] Viz P. Lorenzen, *Elementargeometrie. Das Fundament der analytischen Geometrie*, Mannheim 1984.

nemíníme tím ani empirickou, ani čistě teoretickou možnost, ale možnost praktickou, normativní,[9] která se týká všech prodloužení, jež jsou „dostatečně dobrá" či „akceptovatelná". Podle tohoto čtení se uvedené postuláty a na nich založené věty stávají apriorními v tom smyslu, že nejsou přímo vyvratitelné žádnou jednotlivou zkušeností. Jsou to ideální normy utváření těles a posuzování jejich relativní kvality, nikoli deskriptivní tvrzení o této (tj. empirické) nebo jiné (tj. ideální) skutečnosti. Zároveň se ale nejedná ani o nějakou konvenčně či náhodně vybranou sadu pravidel či axiomů, které existují nezávisle na naší schopnosti následovat je anebo aplikovat je, protože k jejich ospravedlnění potřebujeme nějakou obecnou – či, jak říká Stekeler-Weithofer, generickou – zkušenost s vyráběním (relativně) dobrých kvádrů.

Poučení z probírané kapitoly lze shrnout následovně: Když matematik hovoří o tom, že se rovnoběžky protínají v nekonečnu, je to jen teoretická zkratka za tuto praktickou jistotu ve vytváření „relativně dobrých" kvádrů, která v kontextu vesmírných vzdáleností ztrácí svůj původní smysl. Skutečnost, že se světelné paprsky vyslané rovnoběžně dříve či později protnou (nebo že konstruovaný čtyřúhelník bude mít jen tři úhly pravé a čtvrtý jiný), není z fyzikálního hlediska možné považovat za překvapení, neboť nelze očekávat, že v radikálně změněných podmínkách mikro- a makrokosmu zůstanou platit normy pro kontrolu pozemských vzdáleností a časových intervalů. Objev neeuklidovských geometrií a jejich úspěšnou aplikaci ve fyzice tedy nelze chápat jako absolutní vyvrácení euklidovské geometrie, ale jen jako prototeoretický podnět k revizi, jež by vzala v potaz změněný kontext. Můžeme samozřejmě říci, že je prostor zakřivený či neeuklidovský, za podmínky, že tím nezamýšlíme artikulovat nějaký věčný fakt, ale instrumentální rozhodnutí začlenit nepřesnost (empirických) zkoumání do naší teorie, tedy rozhodnutí, které v prvním, pozemském případě nebylo nutné. Pozemský případ je přitom v nějakém ohledu kanonický, neboť přes něj – jakožto bytosti obývající svět středních dob a vzdáleností – posuzujeme ostatní případy, kdy např. pojem křivosti máme právě jen díky pojmům rovnosti a rovnoběžnosti kodifikovaným normativní praxí vyrábění uspokojivých „euklidovských" kvádrů.

Zobecníme-li tento postřeh, pak je příslušný rozdíl důležitý také v případě tzv. logiky vágnosti (*fuzzy logic*), je-li chápána jako ta pravá a jediná pro náš vágní a „nepřesný" svět. Klasická logika dvou hodnot zde nemá nijak privilegované postavení, až na to, že i konstatování vágnosti musí být v konečném důsledku považována za jednoznačně pravdivá či nepravdivá, *tertium non datur*.

9 Wittgenstein by zde hovořil o gramatickém použití slova „moci", které znamená v geometrii něco jiného než ve fyzice, v níž nejde libovolnými dvěma body (např. na Měsíci a na Zemi) táhnout přímku. Viz L. Wittgenstein, *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics, Cambridge, 1939*, vyd. C. Diamond, Hassocks 1976.

3) Od protogeometrie ke geometrii ideálních forem

Úkolem třetí kapitoly recenzovaného svazku je metodické ospravedlnění přechodu od protogeometrických vět (o protogeometrické rovině, chápané jako povrch daného pravoúhlého tělesa a jeho potenciálních extenzí) k větám teoretické geometrie, které se zabývají abstraktní rovinou ideálních (tj. nesituovaných) bodů, přímek a těles. Pouze objasněním tohoto posunu lze ospravedlnit nebo demystifikovat platonistické tvrzení, podle něhož (teoretická) geometrie odkazuje k ideálním (nečasovým a neprostorovým, bezrozměrným) formám, a její teorémy tedy nejsou empiricky pravdivé, protože empirický kruh ve skutečnosti není kruh, empirická přímka není přímka atd. Pak je také možné vysvětlit, jak pomocí odkazu na názor ohodnotit dobře utvořené geometrické věty. – Teoretickou bází tohoto posunu je podle autora elementární verze Desarguesovy věty, artikulující základní vlastnosti centrální projekce geometrických obrazců, tj. geometrické podobnosti. Stekeler-Weithofer zdůrazňuje, že se jeho důkaz explicitně vyhýbá technice počítání s proporcemi, aby mohl později definovat pojem bezrozměrné formy, jejíž body a čáry nemají velikost ani šířku, a v důsledku pak také pojem čisté veličiny, lišící se od veličin pojmenovaných – typu 5 jablek, 3/2 litru či $\sqrt{2}$ metru – právě absencí pojmenované jednotky.

Ve čtvrté kapitole je vysvětlen schematický jazyk deikticky zavedených diagramů, jehož bude užito později pro reprezentaci abstraktních obrazců skrze kanonické substituovatelné termy. Tyto obrazce jsou založeny na konstrukcích s označeným pravítkem, což vede k pojmu pythagorejského obrazce, tj. obrazce zkonstruovatelného bez pomoci kružítka, a na konstrukcích s pravítkem a kružítkem, což vede k pojmu euklidovského obrazce. Každý obrazec sestrojitelný těmito konstrukcemi, resp. podle instrukcí popsaných v daném jazyce, obdrží jméno v kanonické formě, začínající vždy jménem $[:P_0P_1P_2]$ elementární konstrukce souřadnicového systému, tj. třemi body P_0, P_1, P_2, kde vzdáleností mezi P_0 a P_1 nebo P_2 je jednotková délka a úhel $P_2P_0P_1$ je pravý. Uvedeme-li jiný příklad, elementární term $[P_iP_j{\perp}P_k{:}P_m]$ předepisuje sestrojení kolmice bodem P_k k přímce $g(P_i,P_j)$, čímž je zkonstruován jejich průsečík P_m. Komplexní termy jsou definovány induktivně jako posloupnosti takových instrukcí, samozřejmě při zohlednění dalších upřesnění, která vynecháváme.

Hlavním cílem probírané kapitoly je ukázat, že z třídy všech *syntakticky* dobře utvořených termů lze vydělit množinu těch, které jsou proveditelné neboli dobře utvořené s*émanticky*, pouze na základě (čistého) názoru. K tomu je zapotřebí tzv. princip formy (*Formprinzip*), jehož název je převzat od Lorenzena a Inhetveena. Tento princip garantuje, že k obrazci libovolné velikosti existuje podobný obrazec dostatečně velký na to, aby umožnil rozhodnout, zda je daný term proveditelný, či nikoli. Na rozdíl od Lorenzenova systému, k němuž je princip formy jednoduše přidán jako další postulát, jedná se ve Stekeler-Weithoferově knize o důsledek Desarguesovy věty, a jako takový materiálně vyplývá z pěti postulátů definujících pravoúhlé těleso. Tím je z pragmatického hlediska teprve korektně zdůvodněna platónská představa, že v úvahách o formě geometrických obrazců záleží pouze na ideji, nikoli na konkrétním provedení konstrukce.

Poslední krok spočívá ve spojení dvou termů do jednoho tak, že se příslušné diagramy ukáží jako částečné formy nějaké větší formy. Na základě tohoto kroku lze abstrahovat od toho, že jsou jednotlivé body závislé na specifických diagramech, a dospět k bodům ideální geometrické roviny. Ze sémantického pohledu, jak byl zmíněn výše, to vyžaduje specifikaci kritéria identity dvou libovolných jmen bodů napříč diagramy, což obdržíme snadno, řekneme-li, že body P_s, Q_t jsou v nějakých termech *s*, *t* identické tehdy a jen tehdy, když jsou identické v dobrém diagramu odpovídajícímu spojenému termu $s+t$, tj. v diagramu, v němž jsou nejprve provedeny instrukce *s* a poté instrukce *t*. Formálně lze říci, že jsou identické tehdy, když term požadující konstrukci kolmice k přímce určené body P_{s+t}, Q_{s+t} není proveditelný, protože jimi nelze táhnout přímku. Díky nezávislosti na konkrétním termu či diagramu se tyto body stávají specifickými matematickými objekty tvořícími ideální rovinu. Návazně na to se definuje rovnost ideálních geometrických forem, tedy i ideální forma sama.

4) Kant ve věku relativity

Podle Stekeler-Weithofera jsou těmito úvahami položeny základy geometrie v jejím obvyklém vědeckém tvaru, jenž je probírán v 5. kapitole. Body a vektory ideální roviny tu jsou popsány axiomaticky, algebraicky a aritmeticky. Zavedením souřadnicového systému a konvenčním stanovením jednotkové délky můžeme nejprve identifikovat proporce a velikosti ploch a těles s délkami či body osy x, čímž dosáhneme možnosti jejich algebraického zpracování. V druhém kroku je tento algebraický přístup rozšířen tak, že přijmeme všechny kořeny polynomů coby průsečíky těchto polynomů s osou *x* jako body této osy. V třetím kroku je pojem polynomu coby prototyp spojité funkce rozšířen přijetím (spojité) limity řady funkcí jako funkce. Aby bylo možné splnit větu o mezihodnotě pro tyto a dokonce pro obecněji definované spojité funkce, je třeba popsat kontinuum nejliberálnějším možným způsobem – způsobem, jaký navrhl Dedekind (přes libovolné „řezy“ na racionálních číslech) či Cantor (přes libovolné Cauchyho posloupnosti racionálních čísel). Teprve po provedení této aritmetizace, zdůrazňuje autor, je splněn Hilbertův axiom úplnosti.

Existence mezihodnoty pro spojité funkce na kontinuu odpovídá Aristotelově představě, že (reálná) přímka není aktuální totalitou (množinou) bodů, ale jen prostorem, v němž jsou tyto body vytvářeny protnutím přímky s přípustnými křivkami. Po Cantorově liberalizaci se situace změnila opačným směrem, jenž vedl k teorii množin s jejími nekonečnými veličinami a nástroji pro jejich měření. Na tomto pozadí je ve zbývajících kapitolách diskutována myšlenka axiomaticky a modelově-teoreticky založené aritmetiky, analýzy a geometrie souběžně s fenoménem nestandardních modelů kontinua. Autorův přístup je v základě skeptický, poukazující speciálně na fiktivní či sémanticky nedourčený charakter vyšší teorie množin a modelově-teoretických struktur. Tyto je třeba ostře odlišovat od modelů definovaných sémanticky korektním způsobem, jak byl načrtnut výše.

Poslední kapitoly knihy se věnují problému reprezentace pohybu v prostoru, tj. měření prostoru a času, v němž se moderní vývoj odchýlil od vědeckých standardů známých Kantovi nejzjevněji a nejradikálněji. Zvoleným prototypem je Gaussova metoda mapování krajiny lokálním měřením, naznačující, v jakém smyslu nám může Riemannova geometrie poskytnout rámec pro určování globálních vlastností časoprostoru lokálními pravidly euklidovské geometrie. Analogicky ke geometrickému případu je rozpracována myšlenka, podle níž musí být pojem času dán materiálně skrze postuláty popisující konstrukci hodin. Problém jejich synchronizace činí zjevně problém času problémem prostoru a naopak. Stekeler-Weithoferův výklad v této oblasti je podáván opět na pozadí výsledků Lorenzenovy školy, speciálně protofyziky Petera Janicha.[10] Co se týče Lorenzenova a Janichova pokusu podat pragmatické základy euklidovské geometrie a kinematiky, autor tvrdí, že neexistuje žádný apriorní důvod, proč používat právě tyto systémy jako obecný rámec vyčerpávající všechny dobré metody měření délek a dob. V obecné rovině platí totéž pro podobné pokusy vystavět obecnou, na kontextu nezávislou teorii argumentace, jak to autor sám jinde tvrdí o Lorenzenově dialogické logice.[11]

5) Závěr

Hlavní poučení ze závěrečných kapitol i z celé knihy lze shrnout následovně: Kant sice nevzal v potaz roli relativity v naší orientaci v prostoru a času, nicméně jeho hlavní vhled zůstává platný: prostor a čas nejsou vrozené formy vnímání, ale naše schémata řádu zkušenosti. Tento bod se nabízí dále rozvinout ve směru transcendentálního pragmatismu, tj. nauky, že roli pozorovatele včetně jeho praktických zájmů a možností je nutno nějak vzít v potaz či začlenit do *našich* teorií, tak, aby byl na jednu stranu vysvětlen jejich úspěch v aplikaci na skutečnost – tradičně artikulovaný či odbytý jejich prostou „korespondencí“ – a zároveň vyložena evoluce našeho poznání a změny vědeckých paradigmat, a to nejen v oblasti empirických věd, jako je biologie, kde jsme si na ně již zvykli, ale i ve sféře disciplín čistého rozumu, od logiky a matematiky po filosofii. Dokladem, že i v této skupině oborů je nutno akceptovat a promyslet nějakou formu vývoje, je právě osud Kantova transcendentalismu, od jeho absolutistické varianty (euklidovská geometrie jako jediná správná teorie prostoru) po různé relativizované podoby, kam můžeme řadit Lewisovo pragmatické, Cassirerovo genetické, Lorenzenovo materiální či Foucaultovo

[10] Viz R. Inhetveen, *Konstruktive Geometrie. Eine formentheoretische Begründung der euklidischen Geometrie*, Zürich 1983.

[11] P. Janich, *Die Protophysik der Zeit. Konstruktive Begründung und Geschichte der Zeitmessung*, Frankfurt a. M. 1980.

historické apriori. V duchu úvodem popsaného pomocného či terapeutického pojetí filosofie matematiky nám Stekeler-Weithoferova kniha ukazuje, jak lze rozvinout Kantovu teoretickou filosofii ve světle nových vědeckých objevů a filosofických rozlišení, které Kant nemohl anticipovat.[12,13]

Vojtěch Kolman

12 Viz P. Stekeler-Weithofer, *Grundprobleme der Logik. Elemente einer Kritik der formalen Vernunft*, Berlin – New York 1986, část 3.

13 Práce na této recenzní studii byla podpořena z grantu GAČR P401/11/0371 *Apriorní, syntetické a analytické od středověku po současnou filosofii*.